

Određivanje amplitude oscilacija

1 Uvod

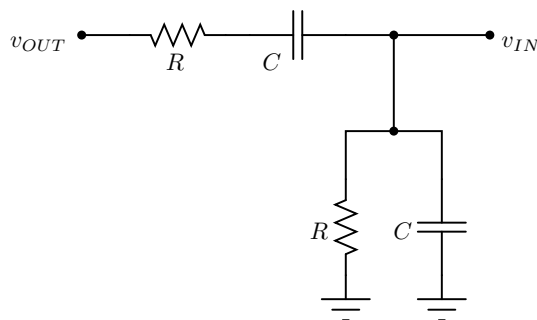
U dosadašnjim razmatranjima su oscilatori posmatrani kao linearni sistemi. U analizi je korišćena metodologija analize linearnih kola, pre svega koncept funkcije prenosa. Najvažniji rezultat analize je zaključak da je za sigurno uspostavljanje oscilacija neophodno da linearan sistem ima polove u blizini imaginarne ose, ali u desnoj kompleksnoj poluravni. Dakle, željeni sistem je nestabilan, ima odziv čija anvelopa eksponencijalno raste i sa protokom vremena teži beskonačnosti. Ovakav odziv je daleko od željene sinusoide na izlazu oscilatora, već samo na nju manje ili više liči tokom procesa uspostavljanja oscilacija.

U realizovanom kolu odziv neće rasti neograničeno. U zavisnosti od konkretne realizacije, pri nekoj amplitudi napona i struja u kolu linearni model će prestati da važi. To znači da će doći do znatnih razlika između stvarnog odziva sistema i odziva sistema koji predviđa linearni model. Upravo će nelinearnosti ograničiti odziv kola, pa će ustaljeni odziv oscilatora biti granični ciklus po kome se struje i naponi kola periodično ponavljaju.

Problem određivanja amplitude oscilacija oscilatora je problem određivanja periodičnog ustaljenog odziva nelinearnog autonomnog kola. Zbog prisustva nelinearnosti, struje i naponi neće biti prostoperiodični, već će sadržati i više harmonike. Pod pojmom određivanja amplitude oscilacija se najčešće smatra određivanje amplitude osnovnog harmonika (fundamentalna) izlaznog napona. Samo određivanje amplitude osnovnog harmonika nije veliki problem ako je određen odziv kola, ustaljeni složenoperiodični. Određivanje odziva kola je mnogo veći problem, koji najčešće nema analitičko rešenje u zatvorenoj formi, već se odziv određuje numerički, simulacijom.

U ovom razmatranju će kao primer biti analiziran oscilator sa Vinovim mostom kod koga nelinearnosti pojačavača ograničavaju amplitudu izlaznog napona. Biće razmatrane tri tipične prenosne karakteristike pojačavača, a odziv će biti određen numerički, simulacijom modela stanja. Nakon analize i poređenja razmatranih primera, biće uveden aproksimativan metod „opisne funkcije“ (*describing function*) za procenu amplitude oscilacija. Na kraju će biti predstavljena analiza oscilatora sa Vinovim mostom i pojačavačem sa zasićenjem pri promeni pojačanja pojačavača od 3 do 5.

Pre prelaska na analizu konkretnih nelinearnih pojačavača, potrebno je sagledati osobine linearnog dela kola, β -mreže. Takođe, potrebno je i izvesti sistem jednačina stanja pogodan za numeričku simulaciju kada je pojačavač nelinearan.



Slika 1: β -mreža

2 β -mreža

Dvoportna mreža povratne sprege (β -mreža) kod oscilatora sa Vinovim mostom je prikazana na slici 1. Mreža sadrži dva reaktivna elementa i drugog je reda. U ovde prikazanoj analizi smatraćemo da su elementi izabrani tako da oba otpornika imaju istu otpornost i da oba kondenzatora imaju istu kapacitivnost. Funkcija prenosa β -mreže je u tom slučaju data sa

$$\beta(s) = \frac{V_{IN}(s)}{V_{OUT}(s)} = \frac{\frac{s}{\omega_0}}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 3\frac{s}{\omega_0} + 1}$$

gde je

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

Na imaginarnoj osi β -mreža ima vrednost prenosne funkcije

$$\beta(j\omega) = \frac{j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j\left(3\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

koja na frekvenciji oscilovanja (frekvenciji fazne rezonanse) ima vrednost

$$\beta(j\omega_0) = \frac{1}{3}.$$

U prisustvu nelinearnosti, u kolu se javljaju viši harmonici. Pod pretpostavkom da je frekvencija oscilovanja $\omega = \omega_0$ (što nije sasvim tačno, kako će biti pokazano kasnije), prenosna funkcija β -mreže za k -ti harmonik je

$$\beta(jk\omega_0) = \frac{jk}{(1 - k^2) + j3k}.$$

Vrednosti amplitude i faze funkcije prenosa za prvih deset harmonika su date u tabeli 1. Vidi se da sa redom harmonika amplituda prenosne funkcije β -mreže opada, ali ne naglo. Za razliku od toga, faza se osetnije menja za prvih pet harmonika.

Tabela 1: Amplituda i faza prenosne funkcije β -mreže na višim harmonicima

k	$ \beta(jk\omega_0) $	$\arg(\beta(jk\omega_0))$
1	0.333	0.0°
2	0.298	-26.6°
3	0.249	-41.6°
4	0.208	-51.3°
5	0.177	-58.0°
6	0.152	-62.8°
7	0.134	-66.4°
8	0.119	-69.1°
9	0.107	-71.4°
10	0.097	-73.1°

Amplitudska i fazna karakteristika funkcije prenosa β -mreže su u logaritamskoj razmeri prikazane na slici 2. Amplitudska karakteristika funkcije prenosa ukazuje na filter propusnik opsega, sa nulom u nuli koju uzrokuje redni kondenzator i nulom u beskonačnosti koju uzrokuje kondenzator jednim krajem vezan za masu. Na osnovu prikazanog dijagrama se dosta često zaključuje da će β -mreža propustiti samo osnovni harmonik izlaznog napona, odnosno da će svi viši harmonici biti značajno oslabljeni. Međutim, amplitudska karakteristika sa slike 2 obuhvata šest dekada, a harmonici od značaja se nalaze u oblasti užoj od jedne dekade. Stoga, zaključci izvedeni za širok opseg frekvencija nisu od velike vrednosti za opseg frekvencija od interesa.

Na slici 3 su amplitudska i fazna karakteristika funkcije prenosa β -mreže prikazane u linearnoj razmeri, u frekvencijskom opsegu od jedne dekade, za prvih deset harmonika ω_0 . Uočava se prilično blago opadanje amplitudske karakteristike nakon ω_0 , kao i prilično ravna amplitudska karakteristika u blizini ω_0 . U okolini $0.8\omega_0 < \omega < 1.2\omega_0$ amplitudska karakteristika se neznatno menja, a fazna karakteristika odstupa od nule za manje od 10° . Ovako slaba selektivnost će loše uticati na stabilnost frekvencije u prisustvu nelinearnih izobličenja, kako će biti pokazano kasnije.

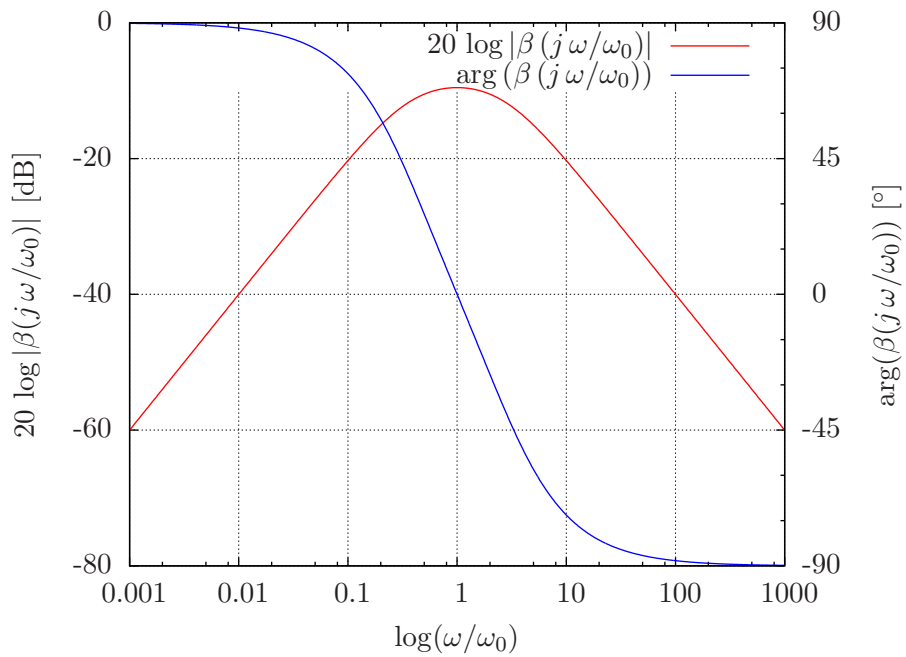
3 Model stanja

Najpovoljniji oblik jednačina kola za numeričku simulaciju u cilju određivanja ustaljenog složenoperiodičnog odziva autonomnog kola je sistem jednačina stanja. Oscilator sa Vinovim mostom za koji će biti izveden model stanja je prikazan na slici 4. Smatraćemo da je pojačavač rezistivan i da je trenutna vrednost izlaznog napona zavisna samo od trenutne vrednosti ulaznog napona, data prenosnom karakteristikom

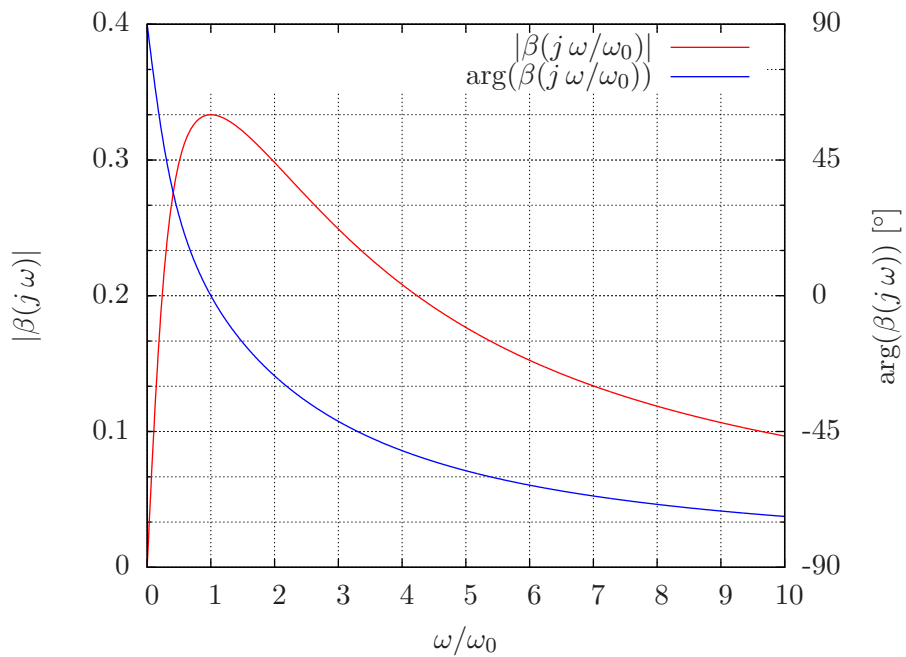
$$v_{OUT} = v_{OUT}(v_{IN}) = v_{OUT}(v_{C1})$$

koja može biti nelinearna.

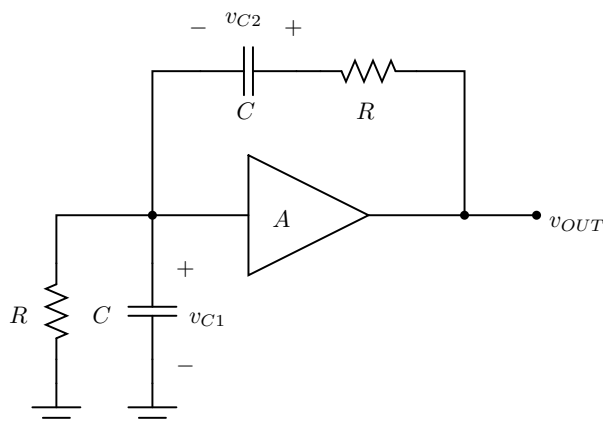
Izražavajući struje kondenzatora preko ostalih struja i napona u kolu i zamenom u karakteristiku kondenzatora dobija se sistem diferencijalnih jednačina po naponima



Slika 2: Frekvencijska karakteristika β -mreže, logaritamska razmera



Slika 3: Frekvencijska karakteristika β -mreže, linearna razmera



Slika 4: Oscilator sa Vinovim mostom

kondenzatora, koji su promenljive stanja,

$$\frac{dv_{C1}}{dt} = -\frac{2}{RC} v_{C1} - \frac{1}{RC} v_{C2} + \frac{1}{RC} v_{OUT}$$

i

$$\frac{dv_{C2}}{dt} = -\frac{1}{RC} v_{C1} - \frac{1}{RC} v_{C2} + \frac{1}{RC} v_{OUT}.$$

Kako bi se pojednostavila notacija, a ujedno i generalizovali rezultati, povoljno je uvesti fazni ugao kao normalizovano vreme, koristeći kružnu frekvenciju fazne rezonanse beta mreže kao normalizacionu konstantu

$$\varphi = \omega_0 t.$$

Zamenom vremena faznim uglom, sistem jednačina stanja postaje

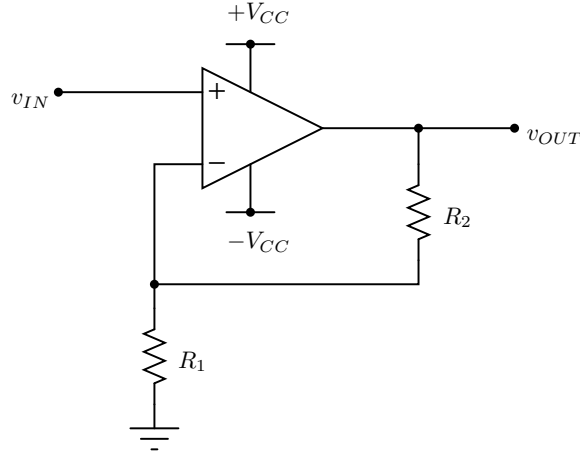
$$\frac{dv_{C1}}{d\varphi} = -2v_{C1} - v_{C2} + v_{OUT}$$

i

$$\frac{dv_{C2}}{d\varphi} = -v_{C1} - v_{C2} + v_{OUT}.$$

Da bi se omogućila numerička simulacija jednačina stanja na digitalnom računaru, potrebno je sistem diferencijalnih jednačina stanja prevesti u sistem diferencijalnih jednačina. Sistem diferencijalnih jednačina, koji je jedino moguće neposredno numerički simulirati, daje rešenje sistema jednačina stanja u diskretnim tačkama vremena, pa se postupak transformacije sistema diferencijalnih jednačina u korespondentan sistem diferencijalnih jednačina naziva diskretizacija. Cilj diskretizacije je izbor korespondentnih diferencijalnih jednačina koje imaju rešenje što je moguće bliže rešenju originalne diferencijalne jednačine. Primenom Ojlerovog metoda (*forward Euler*), koji je najjednostavniji, sistem diferencijalnih jednačina stanja se pretvara u sistem korespondentnih diferencijalnih jednačina

$$v_{C1,n+1} = v_{C1,n} + \Delta\varphi (-2v_{C1,n} - v_{C2,n} + v_{OUT}(v_{C1,n}))$$



Slika 5: Pojačavač sa zasićenjem

i

$$v_{C2,n+1} = v_{C2,n} + \Delta\varphi (-v_{C1,n} - v_{C2,n} + v_{OUT}(v_{C1,n}))$$

gde je $\Delta\varphi$ korak numeričke integracije po faznoj osi. Zbog loše stabilnosti Ojlerovog metoda, izabran je mali korak integracije od samo 0.05° , koji je prethodno isproban u slučaju da je pojačavač linearan sa $v_{OUT} = 3v_{C1}$ i tokom simulacije deset perioda dao je zadovoljavajuće slaganje sa egzaktnim rešenjem.

U cilju preglednije prezentacije rezultata, vremenska zavisnost signala će umesto u funkciji faznog ugla biti prikazana u funkciji normalizovanog vremena $t/T_0 = f_0 t$, gde je

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

pa važi $t/T_0 = \varphi/2\pi$.

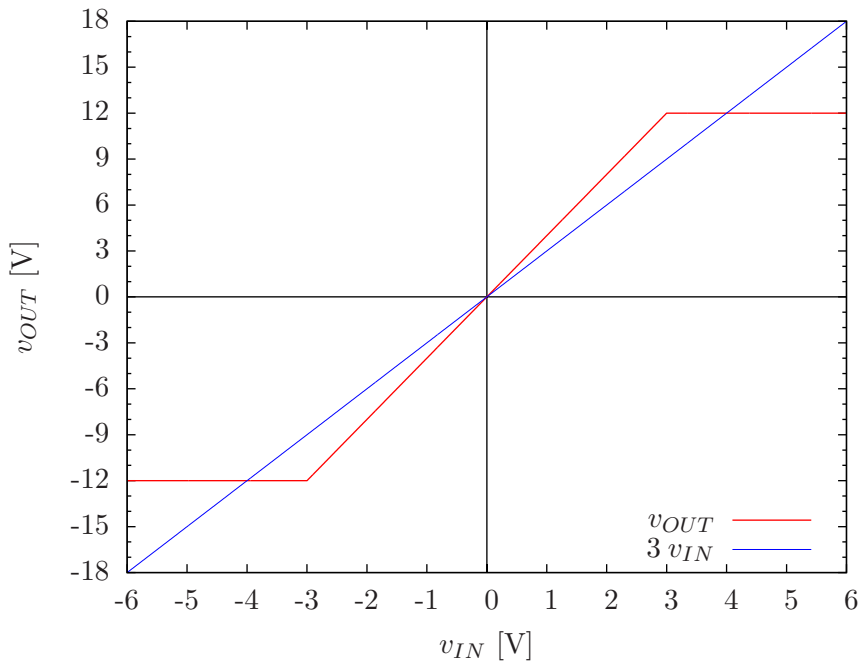
4 Primer 1

Prvi pojačavač koji će biti analiziran je prikazan na slici 5 i kod njega je $R_2 = 3R_1$, pa je pojačanje pojačavača dok nije zasićen $A = 4$. Ovo pojačanje daje polove na $s_{1,2} = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{1}{RC}$, pa je sistem u linearnom režimu nestabilan. Izabrani napon napajanja $V_{CC} = 12$ V ograničava izlazni napon pojačavača sa zatvorenom spregom, pa je prenosna karakteristika

$$v_{OUT} = \begin{cases} -12 \text{ V}, & v_{IN} < -3 \text{ V} \\ 4 v_{IN}, & -3 \text{ V} \leq v_{IN} \leq 3 \text{ V} \\ 12 \text{ V}, & 3 \text{ V} < v_{IN}. \end{cases}$$

Prenosna karakteristika pojačavača je prikazana na slici 6, zajedno sa karakterističkom β -mreže na rezonantnoj frekvenciji, $v_{OUT} = 3v_{C1}$.

Zasićenje pojačavača je nelinearni efekat koji ograničava trenutnu vrednost izlaznog napona, a time i amplitudu oscilacija. U cilju analize ovih efekata, izvršena je numerička simulacija diskretizovanih jednačina stanja tokom $10T_0$, sa početnim



Slika 6: Primer 1, prenosna karakteristika pojačavača

uslovom $v_{C1}(0) = 0.01$ V i $v_{C2}(0) = 0$. Rezultat simulacije je u obliku vremenskih dijagrama promenljivih stanja v_{C1} i v_{C2} i izlazne promenljive v_{OUT} prikazan na slici 7. Iz vremenskih dijagrama se vidi da je pri datom inkrementalnom pojačanju nezasićenog pojačavača, tj. datom rasporedu polova sistema, zadati početni uslov dovoljan da se oscilacije brzo uspostave i oscilator uđe u ustaljeno stanje, praktično nakon $3T_0$. Takođe, vidi se značajno izobličenje izlaznog napona koje uzrokuje odstupanja v_{C1} i v_{C2} od sinusoidalnog oblika. Analiza linearnog modela oscilatora nije mogla da predvidi ova izobličenja.

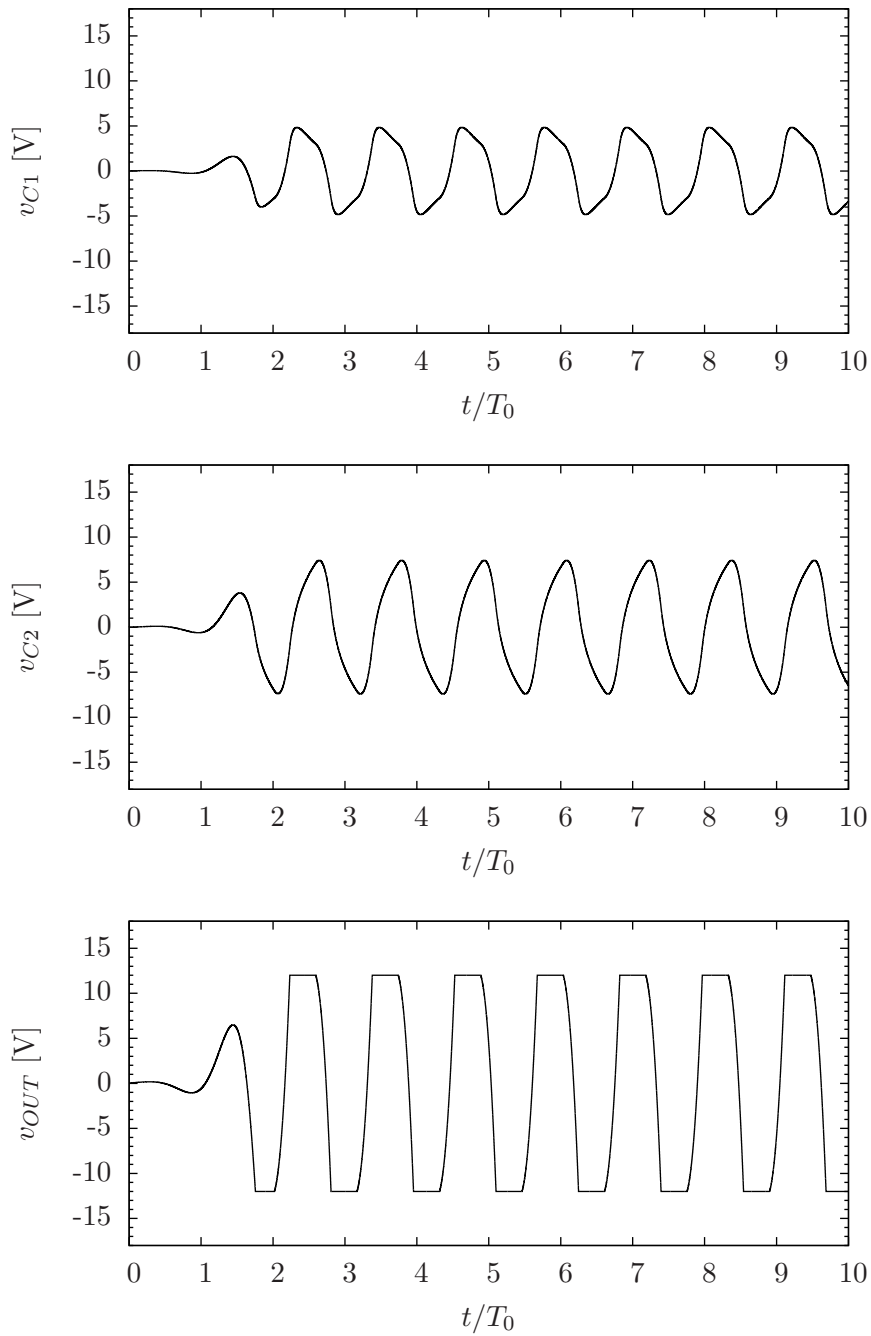
Dodatni efekat koji izaziva nelinearnost je odstupanje frekvencije oscilovanja od ω_0 . U cilju analize ovog efekta, potrebno je simulirati ustaljeni odziv oscilatora, kako bi bilo moguće odrediti periodu oscilovanja. Kako se sa dijagrama sa slike 7 vidi, tokom simulacije $10T_0$ oscilator je ušao u ustaljeno stanje. Kako bi ustaljeno stanje bilo simulirano, vektor promenljivih stanja na kraju simulacije sa slike 7 je zapisan. Sledeća simulacija, opet u trajanju $10T_0$, započeta je sa tim početnim uslovom, tako da je u vremenskim dijagramima izbegnut tranzijent ka ustaljenom stanju. Rezultat simulacije je prikazan na slici 8. Analizom prolazaka kroz nulu promenljivih stanja je određena perioda oscilovanja. Vreme između dva sukcesivna prolaska kroz nulu promenljive stanja, bilo uzlazna bilo silazna, korišćeno je za procenu periode oscilovanja. Između odbiraka talasnog oblika koji se dobijaju kao rezultat simulacije, za potrebe određivanja preseka sa nulom izvršena je linearna interpolacija. Dobijene procene periode su međusobno jako bliske, a njihova srednja vrednost je $T = 1.1470T_0$, što odgovara frekvenciji od $0.87185f_0$. Na ovoj frekvenciji je $|\beta(j0.87185\omega_0)| = 0.33194$ i $\arg(j0.87185\omega_0) = 5.2401^\circ$. Ovako malo odstupanje u odnosu na prenosnu karakteristiku β -mreže na rezonantnoj frekvenciji (niska selektivnost) je i omogućilo nelinearnostima da povećaju periodu oscilovanja

za skoro 15%.

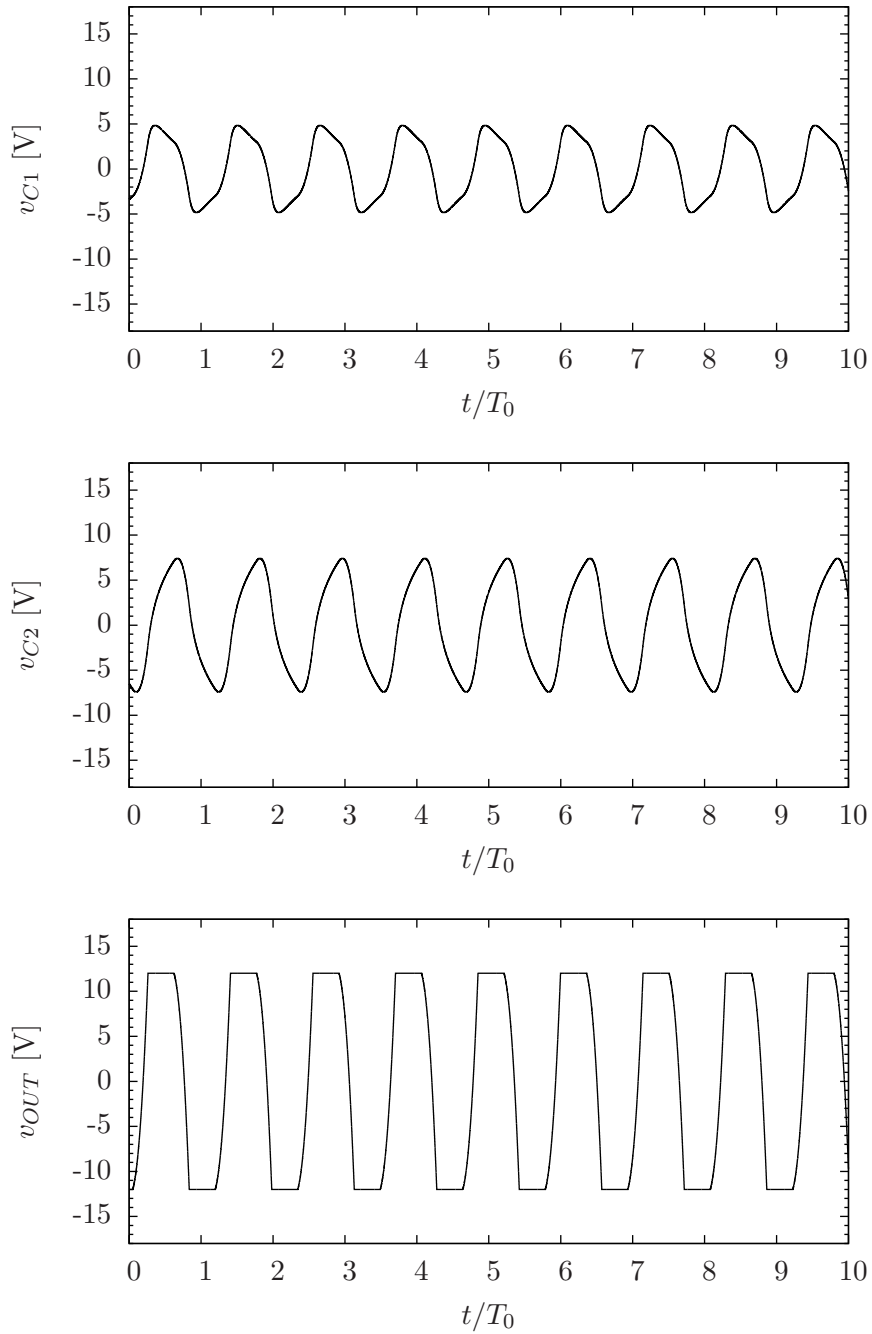
Dijagrami prikazani na slikama 7 i 8 sadrže sve informacije o radu oscilatora. Međutim, različite prezentacije podataka sadržanih u tim slikama daju bolji uvid u pojedine aspekte rada oscilatora. Na slici 9 je prikazan hodograf vektora stanja u faznoj ravni tokom uspostavljanja ustaljenog stanja. Spirala koja se naglo širi ukazuje na brzo uspostavljanje ustaljenog stanja. Na činjenicu da je ustaljeno stanje uspostavljeno ukazuje zatvorena kriva koju hodograf vektora stanja opisuje u faznoj ravni. Ta zatvorena kriva linija se naziva granični ciklus (*limit cycle*).

Na slici 10 je prikazana putanja radne tačke oscilatora u (v_{C1}, v_{OUT}) ravni. Osim putanje koja je prikazana crvenom linijom, prikazana je i putanja koju bi opisivala karakteristika β -mreže, $v_{OUT} = 3v_{C1}$, kada bi oscilator oscilovao na ω_0 i kada ne bi bilo viših harmonika. Prikazane linije se često koriste za procenu amplitude oscilacija, primenom tzv. „metoda presečnih tačaka“. Po tom metodu, smatra se da je amplituda oscilacija određena presečnim tačkama prenosne karakteristike pojačavača i prenosne funkcije β -mreže na rezonantnoj frekvenciji. Metod je heuristički, zasnovan na opet heurističkoj proceni stabilnosti kola („ako ovde napon raste, ovde malo pada, ovde opet raste i vrati se pojačan“) po kojoj je kolo nestabilno ako je karakteristika pojačavača po apsolutnoj vrednosti iznad karakteristike β -mreže, pa tada kolo „sigurno“ osciluje. Opisan „metod“ daje procenu amplitude napona na ulazu pojačavača od 4 V i maksimum trenutne vrednosti napona na izlazu pojačavača od 12 V.

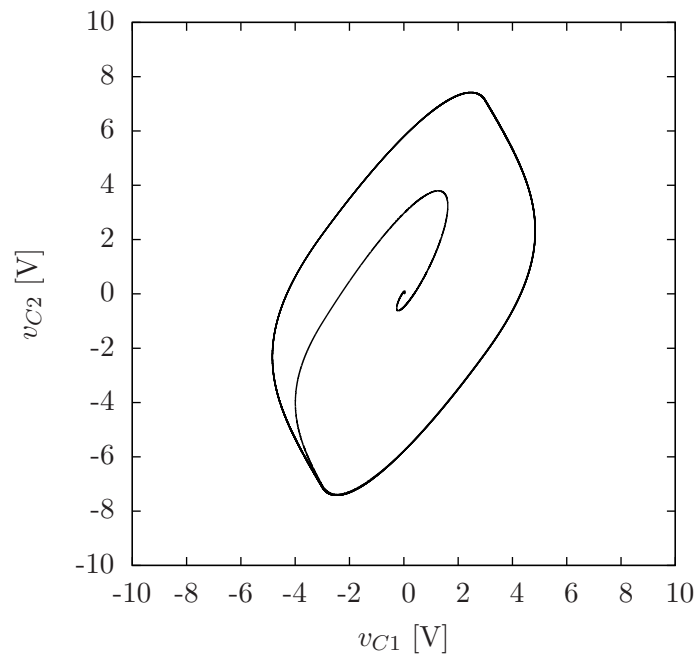
Na osnovu dijagrama sa slike 10 se vidi da je stvarna amplituda v_{C1} (u smislu maksimuma trenutne vrednosti) veća od one koju predviđa metod presečnih tačaka. Ovde valja napomenuti da stvarna događanja u oscilatoru predstavlja crvena linija, ona povezuje ulazni napon sa izlaznim naponom pojačavača, a istovremeno i izlazni napon β -mreže sa njenim ulaznim naponom. Plava linija je hipotetička, po njoj bi se kretala radna tačka β -mreže kada bi njen izlazni napon imao amplitudu određenu simulacijom, ali bi frekvencija oscilovanja bila ω_0 i kada ne bi bilo viših harmonika.



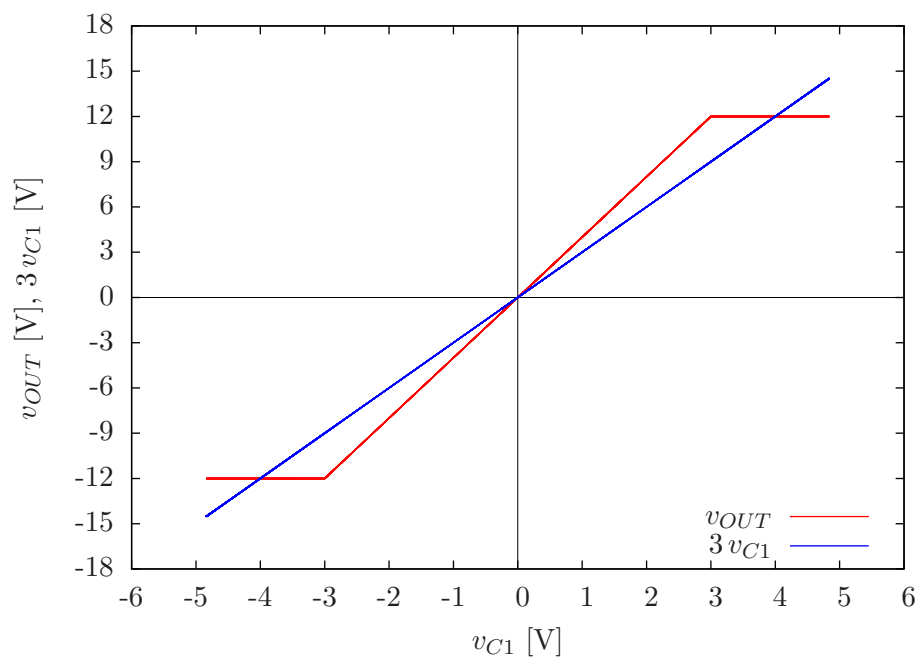
Slika 7: Primer 1, vremenski dijagrami v_{C1} , v_{C2} i v_{OUT}



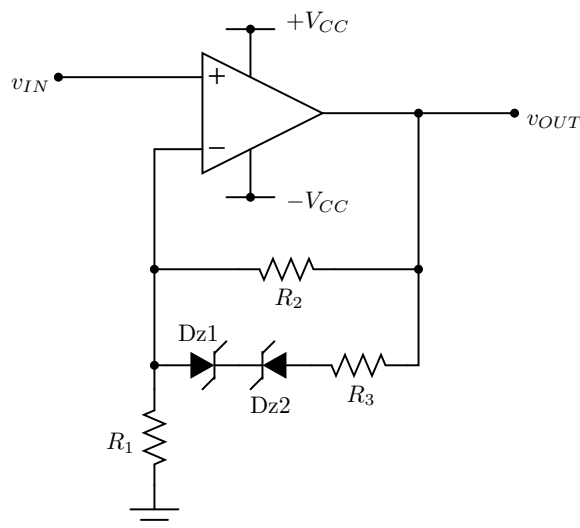
Slika 8: Primer 1, vremenski dijagrami v_{C1} , v_{C2} i v_{OUT} , ustaljeno stanje



Slika 9: Primer 1, uspostavljanje oscilacija, hodograf vektora stanja u faznoj ravni



Slika 10: Primer 1, putanja radne tačke u (v_{C1}, v_{OUT}) i $(v_{C1}, 3v_{C1})$ ravni



Slika 11: Pojačavač sa kontrolisanom nelinearnom prenosnom karakteristikom

5 Primer 2

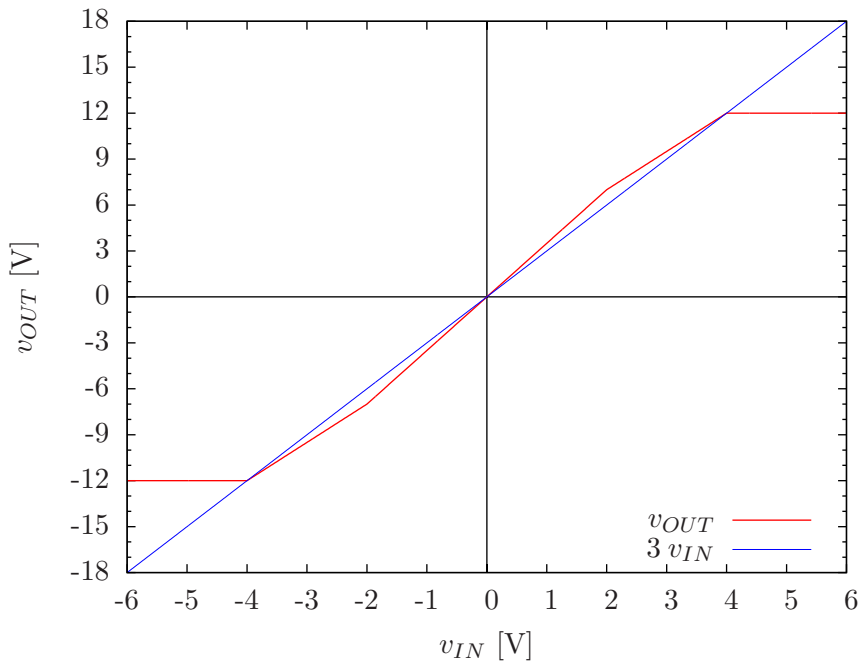
Druga nelinearna prenosna karakteristika pojačavača koja će biti razmatrana odgovara pojačavaču prikazanom na slici 11. U odnosu na pojačavač sa slike 5, otpornost otpornika R_2 je smanjena na $R_2 = 2.5 R_1$, što rezultira smanjenim inkrementalnim pojačanjem sa 4 na 3.5. Osim toga, zener diodama je uneta nova nelinearnost koja u slučaju provođenja dioda inkrementalno pojačanje spušta na 2.5 tako što je otpornost otpornika R_3 izabrana da bude $R_3 = 3.75 R_1$. U cilju dobijanja željene prenosne karakteristike, zener diode su izabrane da bude $V_Z + V_D = 5$ V. Napon napajanja operacionog pojačavača je zadržan na ± 12 V, čime je zadržana nelinearnost usled zasićenja operacionog pojačavača. Ovako izabrani parametri za rezultat daju prenosnu karakteristiku

$$v_{OUT} = \begin{cases} -12 \text{ V}, & v_{IN} < -4 \text{ V} \\ -2 \text{ V} + 2.5 v_{IN}, & -4 \text{ V} \leq v_{IN} < -2 \text{ V} \\ 3.5 v_{IN}, & -2 \text{ V} \leq v_{IN} < 2 \text{ V} \\ 2 \text{ V} + 2.5 v_{IN}, & 2 \text{ V} \leq v_{IN} < 4 \text{ V} \\ 12 \text{ V}, & 4 \text{ V} \leq v_{IN} \end{cases}$$

koja je prikazana na slici 12, zajedno sa pravom $v_{OUT} = 3 v_{IN}$ koja odgovara prenosu β -mreže na ω_0 . Presečne tačke daju procenu amplitude oscilacija od 4 V na ulazu, odnosno 12 V na izlazu.

Kao i u prvom slučaju, izvršena je simulacija ulaska oscilatora u ustaljeno stanje, tokom $10 T_0$, polazeći od početnog stanja $v_{C1}(0) = 0.01$ V i $v_{C2}(0) = 0$. Dobijeni dijagrami v_{C1} , v_{C2} i v_{OUT} su prikazani na slici 13. Iz dijagrama se vidi da oscilator sporije ulazi u ustaljeno stanje u odnosu na prvi primer, nakon oko $5 T_0$. Takođe, u dijagramu v_{OUT} uočava se manje izobličenje nego u prvom primeru.

Hodograf vektora stanja u faznoj ravni je prikazan na slici 14. Sporiji prilaz ka ustaljenom stanju se vidi na osnovu spirale koja se sporije širi. Takođe, na osnovu odziva u obliku zatvorene konture koji se tokom simulacije dostiže, zaključuje se da je u okviru $10 T_0$ dostignuto ustaljeno stanje.



Slika 12: Primer 2, prenosna karakteristika pojačavača

Na slici 15 je prikazana putanja radne tačke oscilatora u (v_{C1}, v_{OUT}) ravni. Osim putanje koja je prikazana crvenom linijom, prikazana je i putanja koju bi opisivala karakteristika β -mreže, $v_{OUT} = 3v_{C1}$, kada bi oscilator oscilovao na ω_0 i kada ne bi bilo viših harmonika. Na osnovu dijagrama sa slike 15 se vidi da je amplituda oscilacija nešto veća od one koju predviđa metod presečnih tačaka.

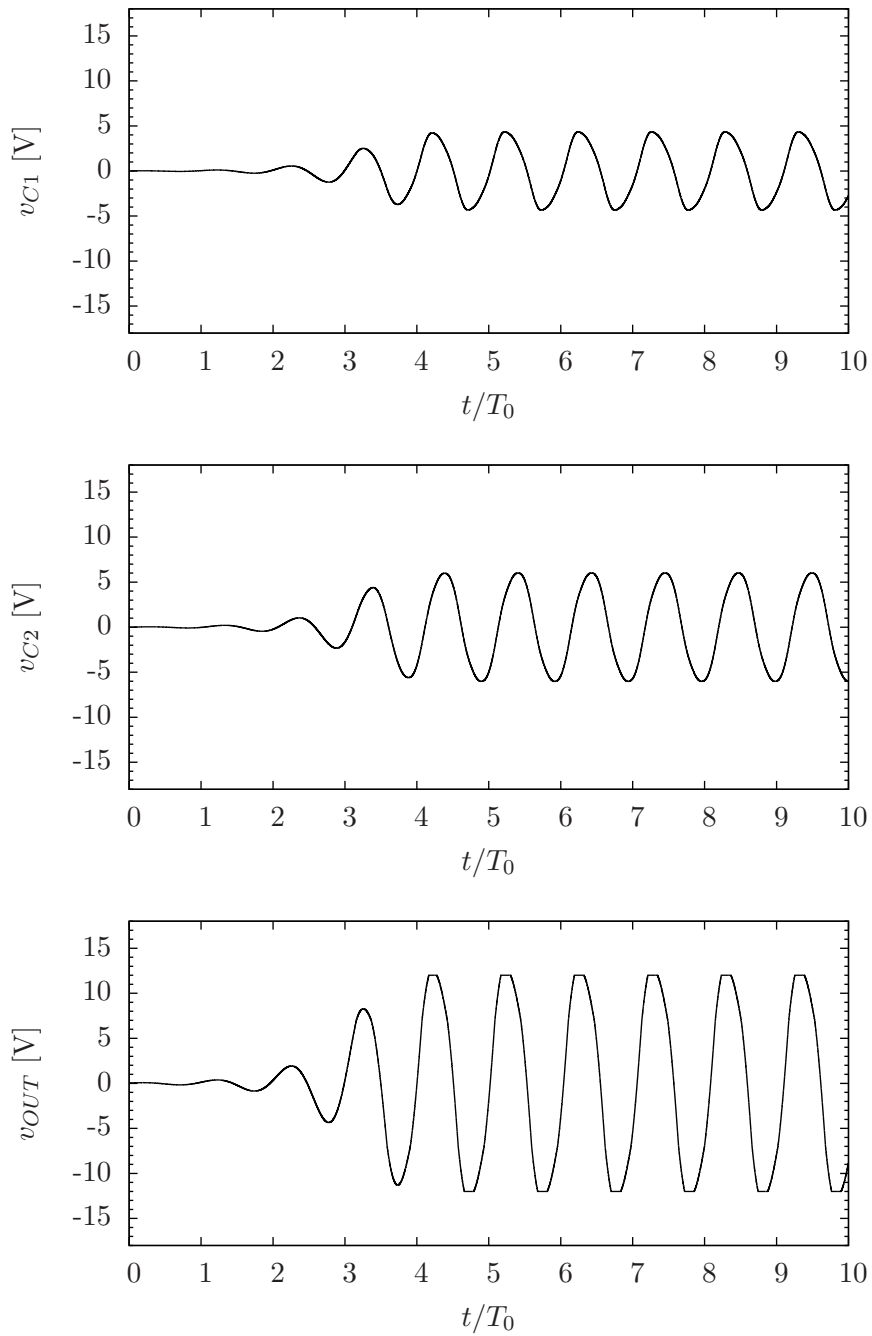
Na isti način kao i u prvom primeru, izvršena je simulacija ustaljenog odziva oscilatora i određena je frekvencija oscilovanja. Za periodu oscilovanja je dobijeno $T = 1.0213 T_0$, što odgovara frekvenciji $f = 0.97910 f_0$. Na ovoj frekvenciji je $|\beta(j 0.97910 \omega_0)| = 0.33330$ i $\arg(j 0.97910 \omega_0) = 0.80679^\circ$. Očigledno, β -mreža oscilatora sa Vinovim mostom odstupanje frekvencije od 2% jedva primećuje.

6 Primer 3

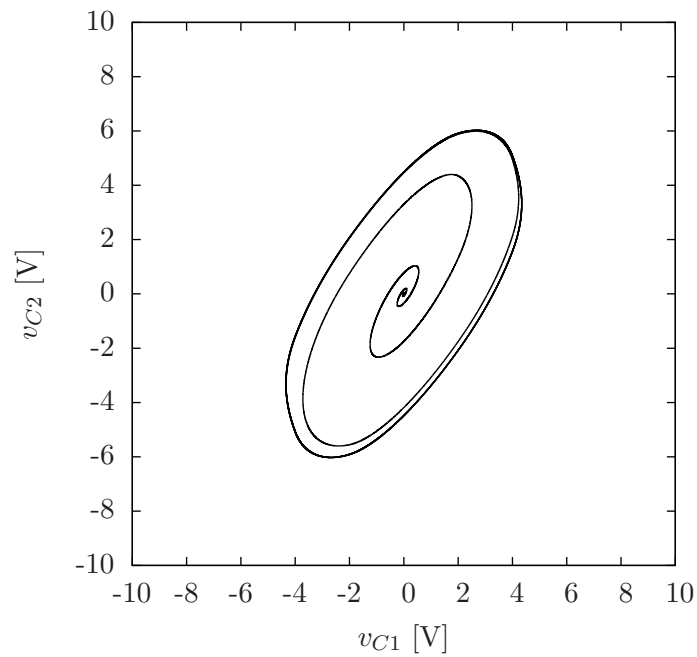
U trećem primeru je u odnosu na drugi primer podignut napon napajanja operacionog pojačavača tako da on tokom oscilovanja ne ulazi u zasićenje. Za ovaj efekat bi $V_{CC} = 15$ V bilo dovoljno, kako će se kasnije videti iz rezultata simulacije. Odsustvo zasićenja za rezultat daje pojednostavljenu prenosnu karakteristiku pojačavača, sa samo dva nagiba prenosne karakteristike,

$$v_{OUT} = \begin{cases} -2 \text{ V} + 2.5 v_{IN}, & v_{IN} < -2 \text{ V} \\ 3.5 v_{IN}, & -2 \text{ V} \leq v_{IN} < 2 \text{ V} \\ 2 \text{ V} + 2.5 v_{IN}, & 2 \text{ V} \leq v_{IN} \end{cases}$$

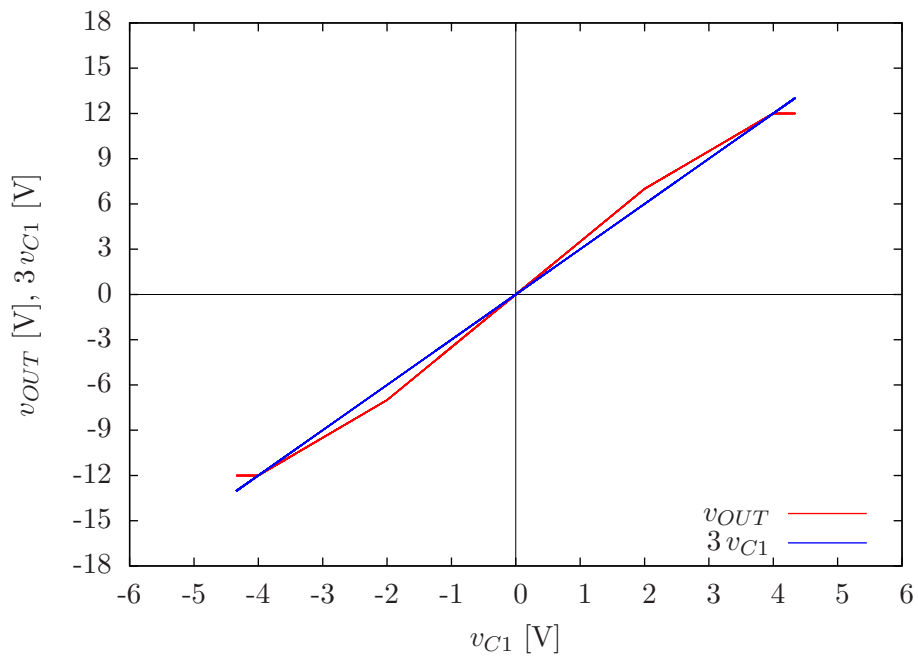
koja je prikazana na slici 16. Da je metod presečnih tačaka tačan, ova promena ne bi dovela ni do kakvih promena u radu oscilatora u odnosu na primer 2. Upravo zbog



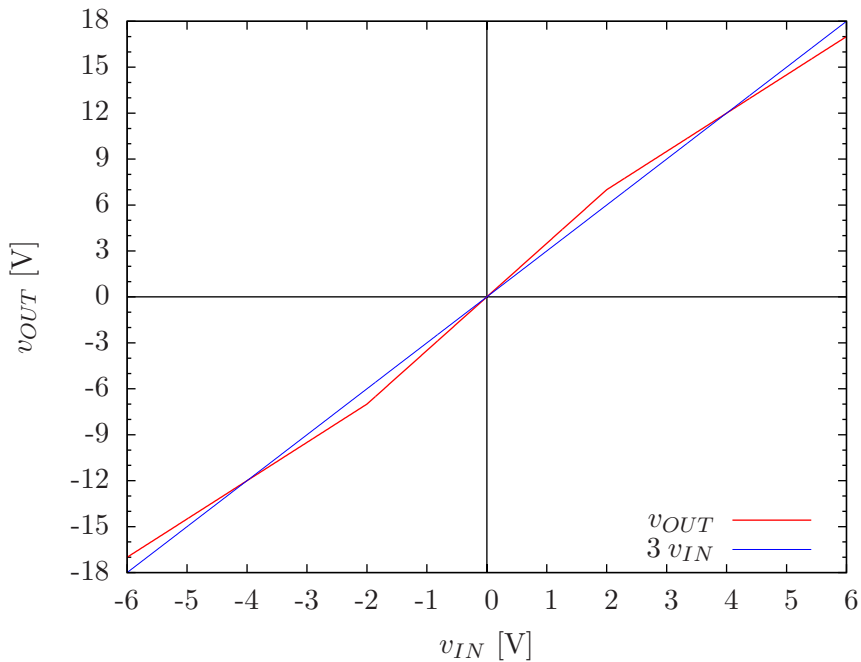
Slika 13: Primer 2, vremenski dijagrami v_{C1} , v_{C2} i v_{OUT}



Slika 14: Primer 2, uspostavljanje oscilacija, hodograf vektora stanja u faznoj ravni



Slika 15: Primer 2, putanja radne tačke u (v_{C1}, v_{OUT}) i $(v_{C1}, 3v_{C1})$ ravni



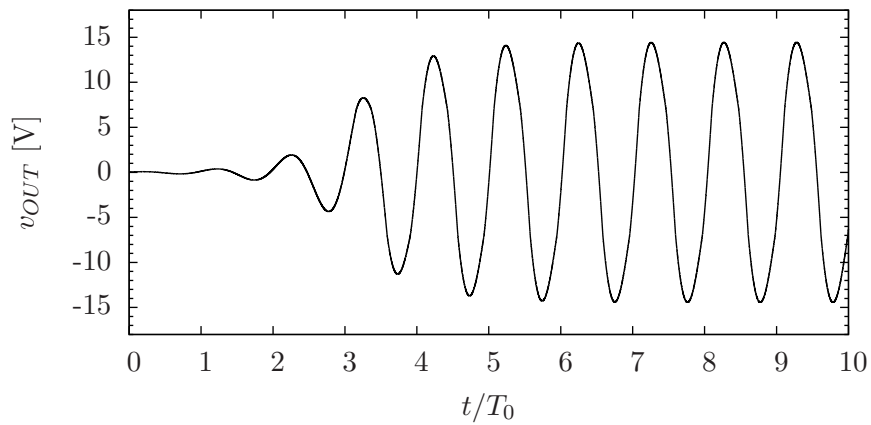
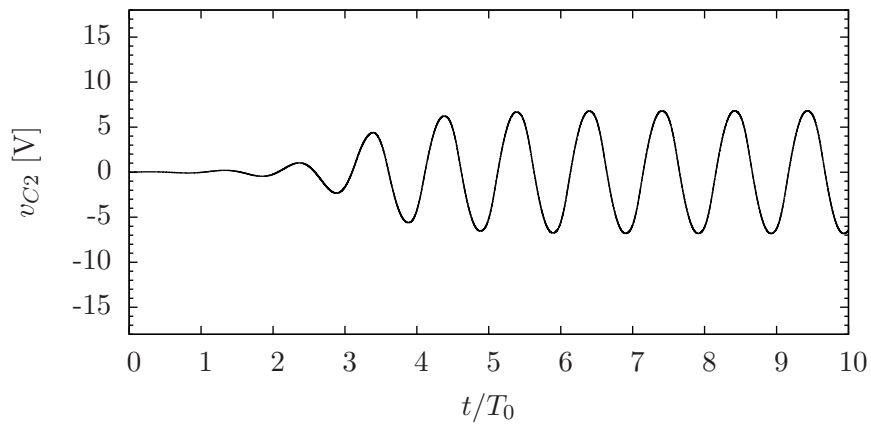
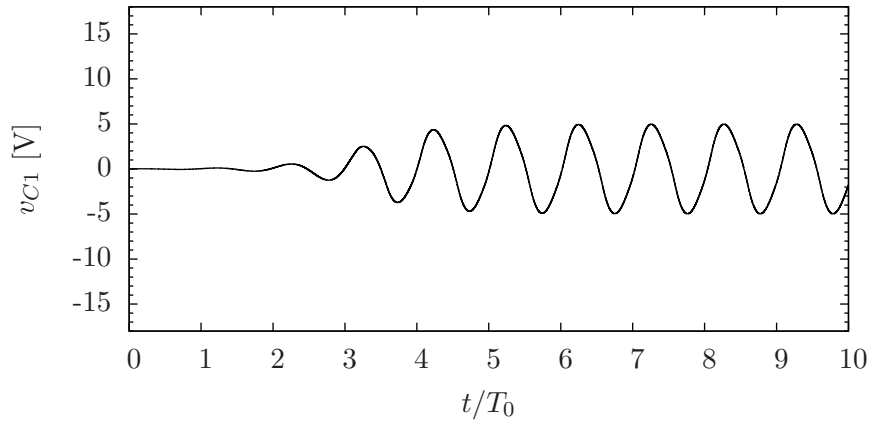
Slika 16: Primer 3, prenosna karakteristika pojačavača

toga je primer 3 uveden, kako bi se razlike u radu oscilatora koje metod presečnih tačaka ne predviđa uočile.

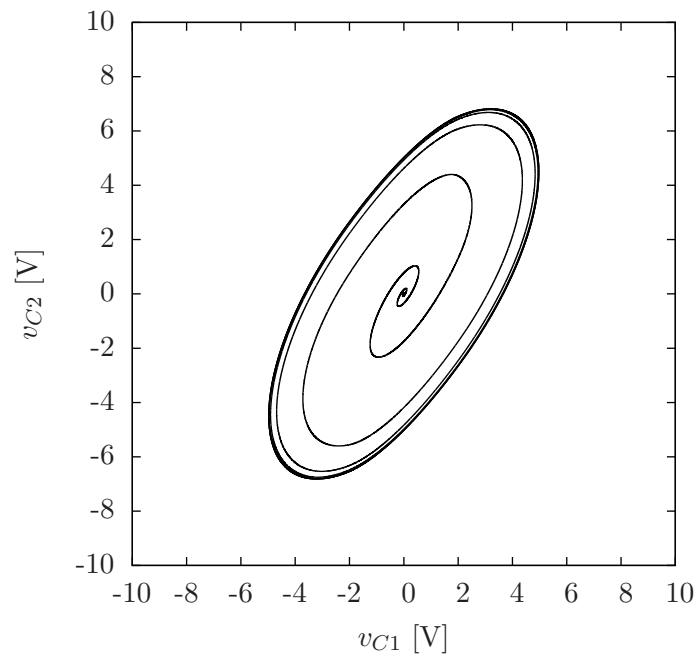
Rezultati simulacije prelaznog procesa uspostavljanja oscilacija dobijeni sa istim početnim uslovima i primenom istog metoda diskretizacije kao u prethodna dva primera, prikazani su na slici 17. Iz dijagrama v_{OUT} se može zaključiti da je vreme uspostavljanja ustaljenog stanja najduže do sada, potrebno je oko sedam perioda kako bi se oscilacije ustalile. Takođe, izlazni napon je najmanje izobličen. Simulacijom ustaljenog stanja, isto kao u prethodnim slučajevima, dobijena je perioda oscilacija od $T = 1.0109 T_0$, što odgovara frekvenciji $f = 0.98918 f_0$, kada β -mreža ima prenosnu karakteristiku $|\beta(j 0.98918 \omega_0)| = 0.33332$ i $\arg(j 0.98918 \omega_0) = 0.41555^\circ$. Očigledno, promena frekvencije oscilovanja od oko 1% jako malo utiče na prenosnu karakteristiku β -mreže oscilatora sa Vinovim mostom.

Hodograf vektora stanja u faznoj ravni je prikazan na slici 18. Najsporiji prilaz ka ustaljenom stanju od sva tri analizirana slučaja se vidi preko spirale koja se najsporije širi. Takođe, na osnovu odziva u obliku zatvorene konture (granični ciklus) koji se tokom simulacije dostiže, zaključuje se da je u okviru $10 T_0$ dostignuto ustaljeno stanje.

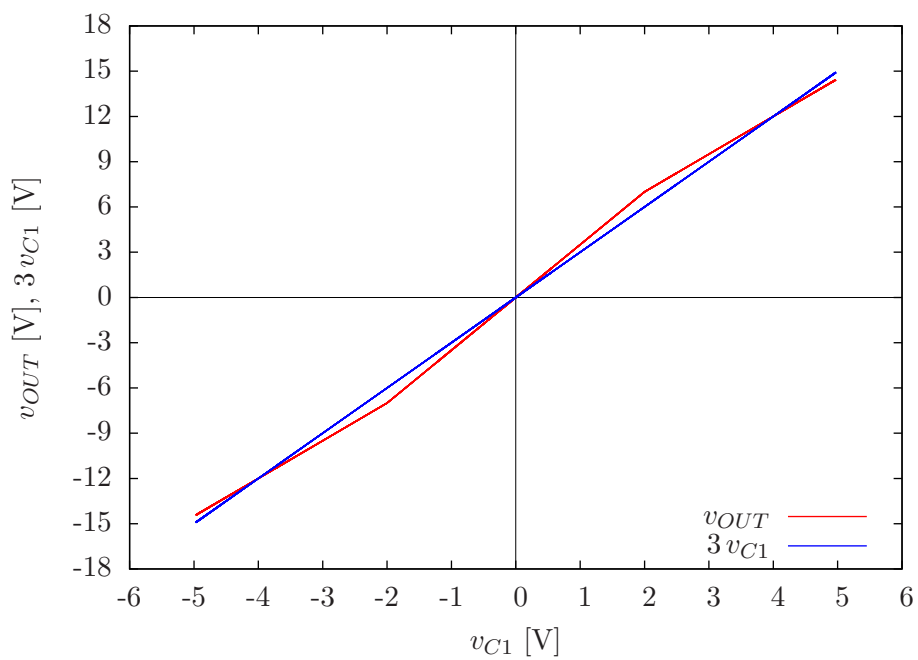
Na slici 19 je prikazana putanja radne tačke oscilatora u (v_{C1}, v_{OUT}) ravni. Osim putanje koja je prikazana crvenom linijom, prikazana je i putanja koju bi opisivala karakteristika β -mreže, $v_{OUT} = 3 v_{C1}$, kada bi oscilator oscilovao na ω_0 i kada ne bi bilo viših harmonika. Na osnovu dijagrama sa slike 19 se vidi da je amplituda oscilacija opet nešto veća od one koju predviđa metod presečnih tačaka.



Slika 17: Primer 3, vremenski dijagrami v_{C1} , v_{C2} i v_{OUT}



Slika 18: Primer 3, uspostavljanje oscilacija, hodograf vektora stanja u faznoj ravni



Slika 19: Primer 3, putanja radne tačke u (v_{C1}, v_{OUT}) i $(v_{C1}, 3v_{C1})$ ravni

7 Poređenje

U cilju poređenja tri prethodno razmatrana oscilatora pomoću kvantitativnih parametara, izvršena je simulacija jedne periode ustaljenog odziva oscilatora. Vektor promenljivih stanja na kraju simulacije ustaljenog stanja, pomoću koje je određena perioda oscilovanja, je zapisan. Potom je, polazeći od te početne vrednosti, izvršena simulacija jedne periode oscilovanja uz neznatno izmenjen korak simulacije kako bi ceo broj koraka stao u periodu oscilovanja, čime se izbegava curenje spektra. Zatim su određeni kvantitativni parametri prikazani u tabeli 2: efektivna vrednost i amplituda osnovnog harmonika v_{OUT} i v_{C1} , njihovo ukupno harmonijsko izobličenje i amplituda i faza prenosne funkcije β -mreže na frekvenciji oscilovanja. Perioda i frekvencija oscilovanja su određene ranije, tokom simulacije desetak perioda ustaljenog odziva, ali su radi kompletnosti i ovi rezultati uključeni u tabelu 2.

Osim parametara prikazanih u tabeli 2, na slici 20 prikazani su hodografi vektora stanja u ustaljenom režimu rada oscilatora, punom linijom. Kako bi se prikazane zatvorene krive linije koje predstavljaju granične cikluse uporedile sa slučajem kada je pojačavač linearan, sa pojačanjem $A = 3$, koji osciluje na $\omega = \omega_0$ sa kompleksnom amplitudom

$$\underline{V}_{OUT1m} = 12 \text{ V}$$

granični ciklusi koji odgovaraju linearnom pojačavaču sa datom amplitudom oscilacija su u dijagramima sa slike 2 prikazani tankom linijom. U tom slučaju je

$$v_{OUT} = 12 \text{ V} \cos(\omega_0 t)$$

i

$$\beta = 1/3$$

pa je

$$\underline{V}_{C1} = 4 \text{ V}$$

odnosno

$$v_{C1} = 4 \text{ V} \cos(\omega_0 t).$$

Fazor napona v_{C2} je u tom slučaju

$$\underline{V}_{C2} = 4 \text{ V} (1 - j)$$

što određuje njegovu trenutnu vrednost kao

$$v_{C2} = 4 \text{ V} (\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t)).$$

Elipsa određena naponima v_{C1} i v_{C2} ,

$$v_{C2} = v_{C1} \pm \sqrt{16 \text{ V}^2 - v_{C1}^2}$$

odnosno

$$2 v_{C1}^2 - 2 v_{C1} v_{C2} + v_{C2}^2 = 16 \text{ V}^2$$

je prikazana u dijagramima sa slike 2 tankom linijom, kao referenca za poređenje.

Tabela 2: Poređenje oscilatora

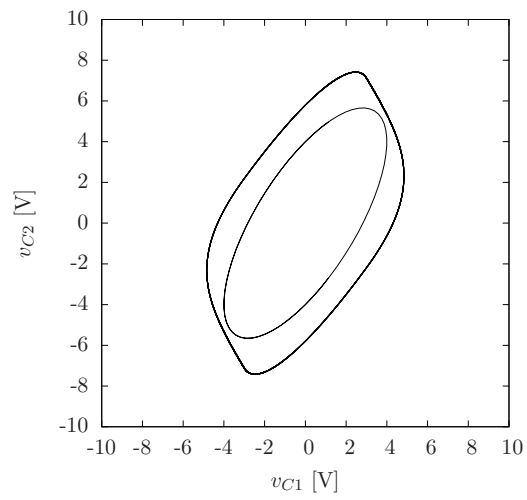
pojačavač	1	2	3
T/T_0	1.1470	1.0213	1.0109
f/f_0	0.87185	0.97910	0.98918
V_{OUTRMS} [V]	10.626	9.295	10.516
V_{C1RMS} [V]	3.4902	3.0924	3.5107
V_{OUT1m} [V]	14.607	13.085	14.872
V_{C11m} [V]	4.8499	4.3624	4.9586
$THD(v_{OUT})$ [%]	24.173	9.552	6.830
$THD(v_{C1})$ [%]	18.912	7.102	5.031
$ \beta(j\omega) $	0.33194	0.33330	0.33332
$\arg(\beta(j\omega))$ [°]	5.24006	0.80671	0.41572

Iz tabele 2 se zaključuje da je najveće izobličenje izlaznog napona imao oscilator iz prvog primera, a najmanje oscilator iz trećeg primera. Ovo izobličenje se može koristiti i kao kvantitativna mera nelinearnosti primenjenog pojačavača, prema čemu bi najnelinearniji od razmatrana tri pojačavača bio prvi, a najlinearniji treći. Ovo se vidi i po slaganju hodografa vektora stanja sa referentnom elipsom, kako je prikazano na slici 20, gde je sličnost najveća u trećem slučaju, a najmanja u prvom.

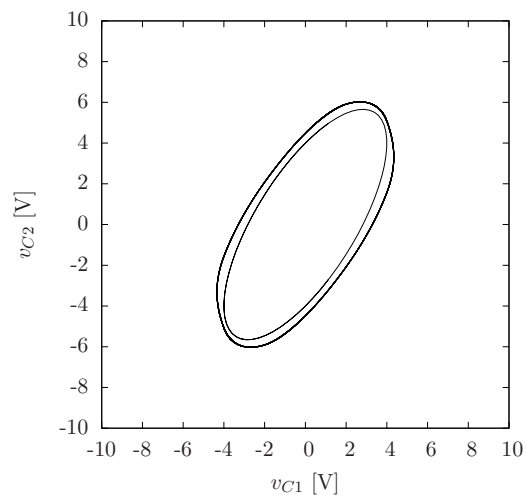
Na osnovu podataka iz tabele 2 se uočava i to da je ukupno harmonijsko izobličenje ulaznog napona pojačavača manje od izobličenja izlaznog napona, što je posledica filterskih svojstava β -mreže. Međutim, razlika u izobličenju nije velika, pošto β -mreža ne uklanja efikasno više harmonike, što je posledica male selektivnosti. Takođe se vidi i to da se za varijaciju frekvencije oscilovanja od oko 15% prenosna funkcija β -mreže neznatno menja, što se potpuno uklapa u sliku niske frekvencijske selektivnosti.

Odstupanje periode i frekvencije oscilovanja od očekivane vrednosti je zavisno od nelinearnosti pojačavača i najveće je bilo u prvom slučaju, a najmanje u trećem. Dakle, povećana nelinearnost pojačavača dovela je do većeg odstupanja frekvencije oscilovanja. Frekvencija oscilovanja je uvek bila manja od očekivane vrednosti.

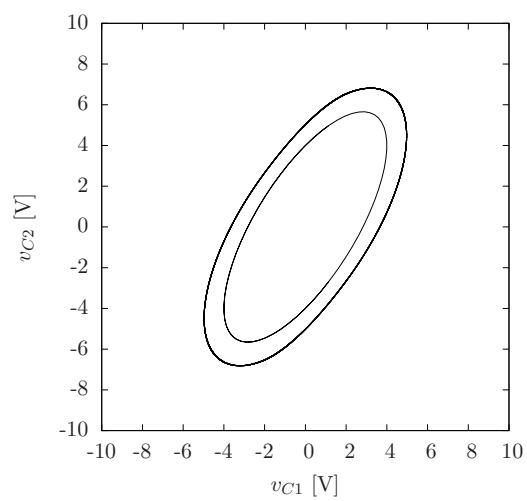
Takođe, na osnovu podataka iz tabele 2 se uočava da je amplituda osnovnog harmonika izlaznog napona oscilatora uvek bila veća od vrednosti koju predviđa metod presečnih tačaka.



(a)



(b)



(c)

Slika 20: Granični ciklusi, poređenje: (a) primer 1; (b) primer 2; (c) primer 3

8 Opisne funkcije (*Describing Functions*)

Do sada prikazana razmatranja su se uglavnom zasnivala na analizi linearnog modela oscilatora. Kako bi se u kolu uspostavile oscilacije, bilo je potrebno da sistem bude nestabilan, sa parom polova u desnoj kompleksnoj poluravni. Kako bi odziv kola ličio na sinusoidu, bilo je potrebno da polovi sistema budu blizu imaginarne ose, ali sigurno u desnoj kompleksnoj poluravni. Takav linearan sistem ima obvojniju odziva koja eksponencijalno raste, pa je amplitudu oscilacija ograničavalo zasićenje pojačavača. Amplituda oscilacija je u tri opisana primera određena numeričkom simulacijom, a to je samo jeftiniji vid izvođenja eksperimenta. Za predviđanje amplitude oscilacija je bio uveden „metod“ presečnih tačaka, čija matematička zasnovanost nije bila predstavljena. Na slikama 6, 12 i 16 su prikazane prenosne karakteristike pojačavača i β -mreže na ω_0 . U oblasti gde je karakteristika pojačavača po modulu iznad karakteristike β -mreže, kada bi kružno pojačanje bilo veće od 1, heurističke tehnike analize kola ukazuju na nestabilnost, te se u toj oblasti očekuje oscilovanje. Rezultati numeričke simulacije u sva tri prikazana primera ukazuju na to da radna tačka oscilatora u ustaljenom režimu izlazi iz ove oblasti i da malo zalazi u oblast gde heurističke tehnike ukazuju na stabilnost. Ipak, vidi se da metod presečnih tačaka pored svih nedostataka daje relativno upotrebljivu procenu amplitude oscilacija. U ovom odeljku će biti rezimirano šta je potrebno da važi kako bi metod presečnih tačaka dao prihvatljivu procenu amplitude oscilacija i biće uveden još jedan metod, matematički nešto zasnovaniji, za bolju procenu amplitude oscilacija.

Pre svega, valja naglasiti da u slučaju dijagrama sa slika 6, 12 i 16, kod pojačavača koji je dobro opisan nelinearnim rezistivnim modelom, radna tačka će se kretati po karakteristici pojačavača. Na tim slikama je karakteristika β -mreže je aproksimativno prikazana, pod pretpostavkama da oscilator osciluje na ω_0 i da nema viših harmonika. Kirhofovi zakoni uslovljavaju da izlazni napon β -mreže bude jednak ulaznom naponu pojačavača. Stoga, viši harmonici i odstupanje frekvencije oscilovanja od ω_0 su izvesni, oni će obezbediti potrebnu putanju radne tačke β -mreže. Oba ova efekta smo videli na sva tri slučaja do sada analizirana simulacijom.

Pod kojim pretpostavkama amplituda oscilacija predviđena metodom presečnih tačaka važi? Spisak korišćenih pretpostavki je sledeći:

1. Kolo osciluje na ω_0 , kad β -mreža ima rezistivnu prenosnu karakteristiku.
2. β -mreža je selektivna i ne propušta više harmonike izlaznog napona pojačavača. (Na primeru β -mreže oscilatora sa Vinovim mostom (bez) vrednost ove pretpostavke je analizirana ranije.)
3. Sadržaj viših harmonika u izlaznom naponu pojačavača je mali.
4. Amplituda osnovnog harmonika izlaznog napona približno je jednaka je maksimumu njegove trenutne vrednosti. (Za brzu procenu važenja ove pretpostavke može da posluži podatak da je kod simetrične povorke pravougaonih impulsa ($D = 0.5$) amplituda osnovnog harmonika jednaka $4/\pi \approx 1.27$ maksimuma trenutne vrednosti.)

U granicama važenja navedenih pretpostavki, metod presečnih tačaka daje prihvatljivu procenu amplitude oscilacija, što je demonstrirano na tri prethodno analizirana primera.

Metod koji će sada biti uveden je i dalje heuristički i obezbeđuje samo procenu amplitude oscilacija. I dalje ćemo se držati pretpostavke da je β -mreža frekvencijski selektivna i da ne propušta više harmonike izlaznog napona pojačavača. Smatraćemo da je pojačavač jedini nelinearan element u sistemu, da je rezistivan i da je njegova prenosna karakteristika poznata. Za potrebe opisivanja pojačavača „opisnom funkcijom prenosa“, pojačavač ćemo pobuditi prostoperiodičnim naponom („čistom“ sinusoidom), a na izlazu ćemo posmatrati osnovni harmonik izlaznog napona. U slučaju linearnog rezistivnog pojačavača, odnos fazora osnovnog (u slučaju linearnog pojačavača i jedinog) harmonika izlaznog napona i fazora ulaznog napona je konstanta jednaka funkciji prenosa pojačavača. U slučaju nelinearnog pojačavača, taj odnos je funkcija amplitude ulaznog napona i to je opisna funkcija prenosa.

Pretpostavimo da su ulaz i izlaz pojačavača naponski (generalizacija za struje je jednostavna), da je pojačavač rezistivan i da je pobuđen naponom

$$v_{IN} = V_m \cos(\varphi)$$

što na izlazu pojačavača proizvodi napon $v_{OUT}(v_{IN}) = v_{OUT}(\varphi, V_m)$. Tada je opisna funkcija prenosa pojačavača određena sa

$$\underline{A}(V_m) = \frac{1}{\pi V_m} \int_{-\pi}^{\pi} v_{OUT}(\varphi, V_m) e^{-j\varphi} d\varphi.$$

U analizi je pretpostavljeno da je pojačavač rezistivan, pa je opisna funkcija prenosa samo funkcija amplitude ulaznog napona pojačavača, V_m . Metod je moguće generalizovati i za frekvencijski zavisne karakteristike pojačavača, što bi za rezultat dalo opisnu funkciju prenosa zavisnu i od amplitude i od frekvencije.

Pretpostavimo da je na osnovu opisanog postupka dobijena opisna funkcija prenosa $\underline{A}(V_m)$. U slučaju uspostavljanja približno sinusoidalnih oscilacija u kolu, uslov oscilovanja iskazan Barkhauzenovim kriterijumom (ekvivalent iskaza da su polovi sistema na imaginarnoj osi) mora da važi, pa je

$$\underline{\beta}(j\omega_0) \underline{A}(V_m) = 1 + j0$$

što se u slučaju oscilatora sa Vinovim mostom i realne opisne funkcije prenosa pojačavača svodi na

$$A(V_m) = 3.$$

Odavde je moguće izračunati amplitudu oscilacija V_m na ulazu pojačavača, a time i izlazni napon. Uvedena tehnika je metod opisne funkcije prenosa i daje bolju procenu amplitude oscilacija od metoda presečnih tačaka.

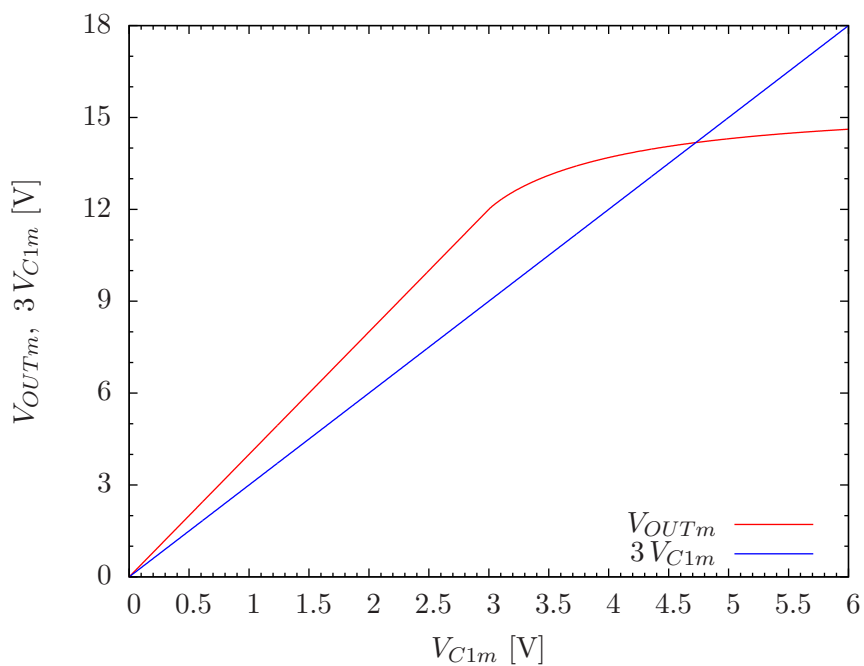
U cilju ilustracije metoda opisnih funkcija prenosa, on je primenjen na sva tri prethodno razmatrana primera. Zbog simetrije prenosne karakteristike pojačavača, u sva tri slučaja imaginarni deo opisne funkcije prenosa pojačavača je jednak nuli. Jednostavnosti radi, opisna funkcija prenosa je određena numeričkom integracijom, a rezultati su prikazani na slikama 21, 22 i 23. Zbog realne opisne funkcije prenosa, po Barkhauzenovom kriterijumu jedina moguća frekvencija oscilovanja je frekvencija

Tabela 3: Amplituda osnovnog harmonika napona na ulazu pojačavača, procena metodom opisnih funkcija prenosa i rezultat simulacije; metod presečnih tačaka u sva tri slučaja predviđa amplitudu od 4 V

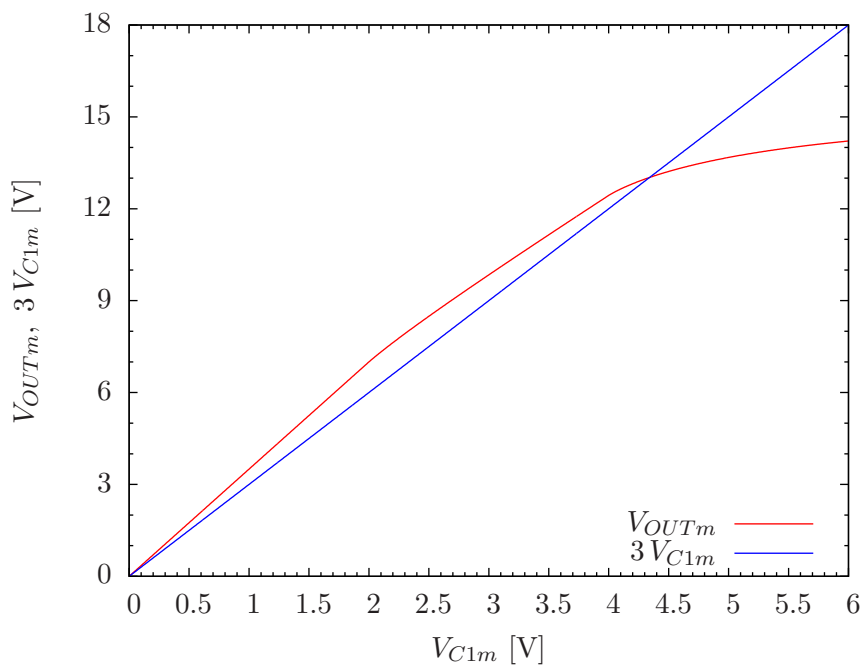
pojačavač	procena	simulacija
1	4.7251 V	4.8690 V
2	4.3397 V	4.3616 V
3	4.9506 V	4.9573 V

fazne rezonanse β -mreže, $\omega_0 = 1/RC$, kada je $\beta(j\omega_0) = 1/3$. Dejstvo obe funkcije prenosa (opisne funkcije prenosa pojačavača i funkcije prenosa β -mreže na $j\omega_0$) je ucrtano u dijagrame sa slika 21, 22 i 23. U preseku krivih je kružno pojačanje jednako 1, pa kolo prema Barkhauzenovom kriterijumu tu osciluje. Procenjene amplitude napona na ulazu pojačavača su prikazane u tabeli 3. Radi poređenja, u istoj tabeli su prikazane amplitude dobijene simulacijom. Uočava se dobro slaganje rezultata u pogledu amplitude oscilacija, iako odstupanje frekvencije oscilovanja nije predviđeno. U poređenju sa rezultatom simulacije i procenom dobijenom primenom opisnih funkcija prenosa, metod presečnih tačaka je dao do 20% nižu procenu amplitude osnovnog harmonika napona na ulazu pojačavača, što uzimajući u obzir jednostavnost metoda i nije loš rezultat.

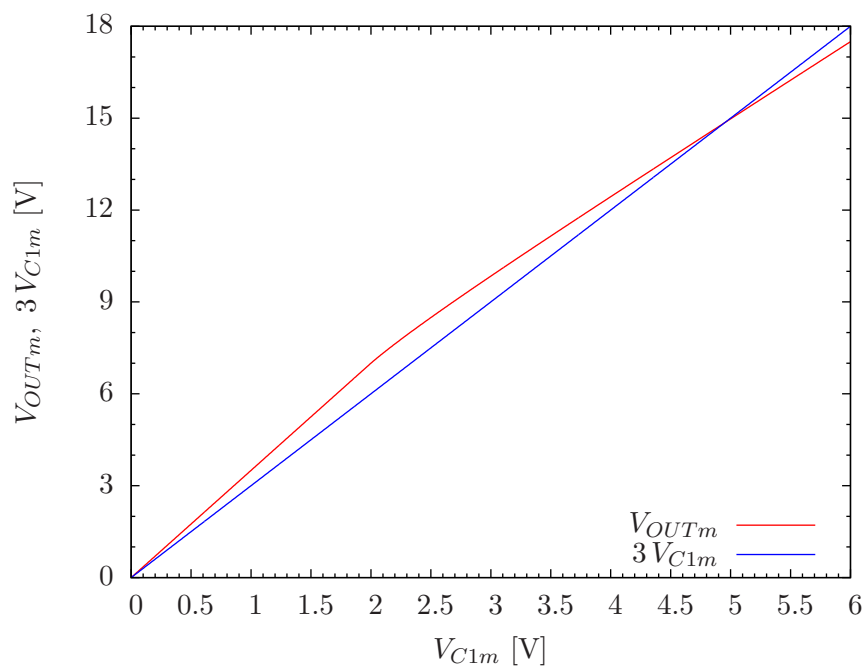
Na osnovu prikazanog, može se zaključiti da metod opisnih funkcija prenosa omogućava dobru procenu amplitude oscilacija. Zbog teškoća vezanih za određivanje opisne funkcije prenosa (u razmatranim primerima primenjena je numerička integracija), otvoreno je pitanje isplativosti primene metoda kod jednostavnih primera, poput oscilatora sa Vinovim mostom, kada je lako simulirati ceo sistem i dobiti potpuniju informaciju. Ipak, metod opisnih funkcija prenosa, iako aproksimativan, pruža uvid u funkcionisanje sistema i može olakšati sintezu.



Slika 21: Primer 1, određivanje amplitude oscilacija primenom opisnih funkcija prenosa



Slika 22: Primer 2, određivanje amplitude oscilacija primenom opisnih funkcija prenosa



Slika 23: Primer 3, određivanje amplitude oscilacija primenom opisnih funkcija prenosa

9 Analiza oscilatora sa Vinovim mostom i pojačavačem sa zasićenjem

U ovom poglavlju će biti analiziran uticaj pojačanja pojačavača sa zasićenjem na parametre oscilatora sa Vinovim mostom u kome se koristi. Analizirana prenosna karakteristika pojačavača je rezistivna, sa simetričnim zasićenjem koje ograničava izlazni napon na $|v_{OUT}| \leq V_{CC}$, poput prenosne karakteristike pojačavača iz prvog primera. Kako bi rezultat analize imao opštiju važnost, tj. kako rezultati analize ne bi zavisili od konkretne vrednosti V_{CC} , povoljno je izvršiti normalizaciju napona na V_{CC} tako što će naponi, npr. v_X , biti zamenjeni normalizovanim ekvivalentima, m_X , prema

$$m_X = \frac{v_X}{V_{CC}}.$$

Ovo treba uraditi sa svim naponima u kolu. Nakon što su naponi normalizovani, jednačine stanja dobijaju oblik

$$\frac{dm_{C1}}{d\varphi} = -2m_{C1} - m_{C2} + m_{OUT}$$

i

$$\frac{dm_{C2}}{d\varphi} = -m_{C1} - m_{C2} + m_{OUT}.$$

Pojačavač koji će biti razmatran, u terminima normalizovanih napona ima prenosnu karakteristiku

$$m_{OUT} = m_{OUT}(m_{IN}, A) = \begin{cases} -1, & m_{IN} < -1/A \\ A m_{IN}, & -1/A \leq m_{IN} \leq 1/A \\ 1, & 1/A < m_{IN} \end{cases}$$

koja je prikazana na slici 24.

Za potrebe numeričke simulacije, normalizovane jednačine stanja se diskretizuju na isti način kako je to bilo urađeno u prethodnim primerima, što za rezultat daje normalizovane diferencne jednačine

$$m_{C1,n+1} = m_{C1,n} + \Delta\varphi(-2m_{C1,n} - m_{C2,n} + m_{OUT}(m_{C1,n}, A))$$

i

$$m_{C2,n+1} = m_{C2,n} + \Delta\varphi(-m_{C1,n} - m_{C2,n} + m_{OUT}(m_{C1,n}, A)).$$

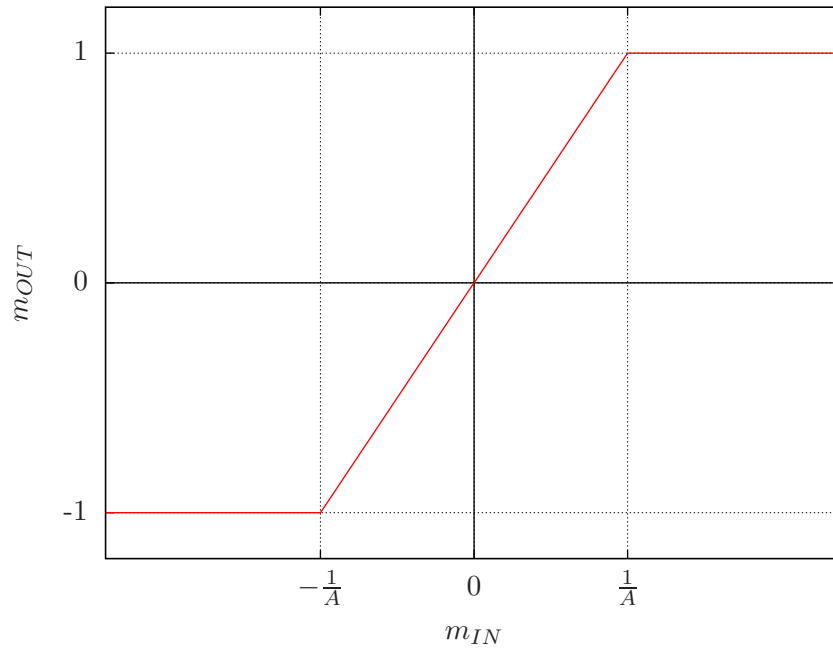
U slučaju da je pojačanje pojačavača samo neznatno veće od 3, u ustaljenom stanju normalizovani naponi na kondenzatorima će biti

$$m_{C1} = \frac{1}{3} \cos(\omega_0 t)$$

i

$$m_{C2} = \frac{1}{3} \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(\omega_0 t).$$

Pošto nas u analizi zanima samo ustaljeni režim, povoljno je u programu za simulaciju zadati početnu vrednost za promenljive stanja blisku nekoj od tačaka na

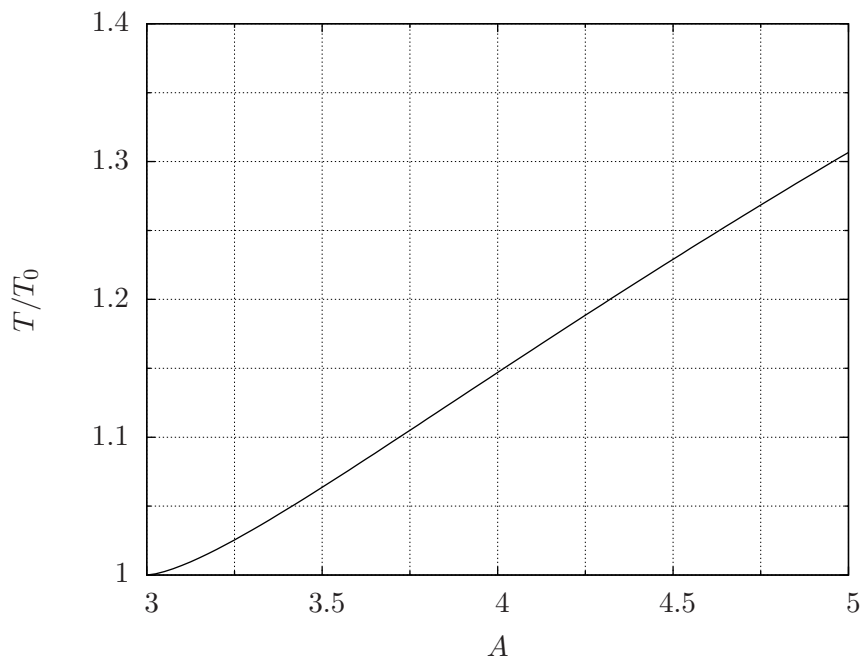


Slika 24: Normalizovana karakteristika pojačavača sa zasićenjem

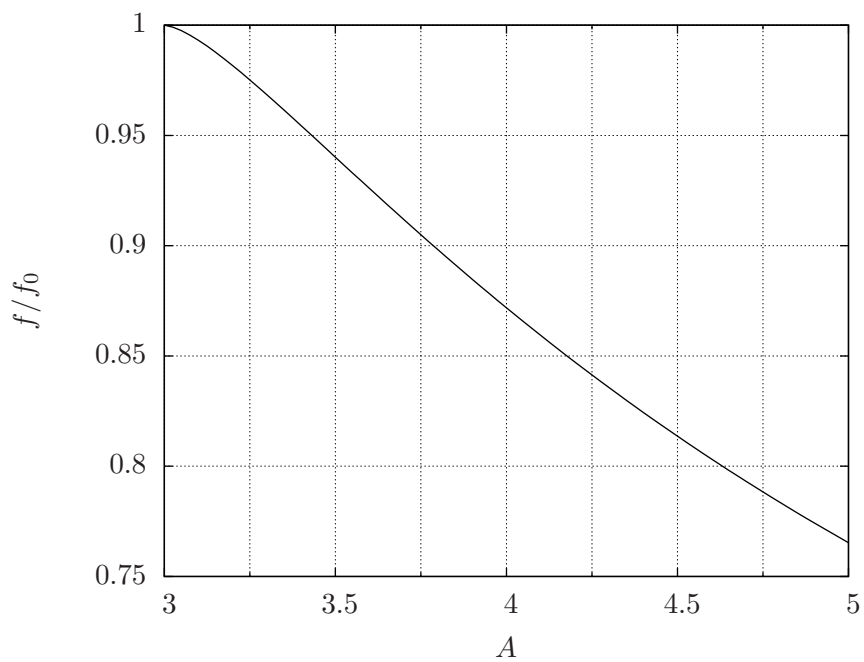
graničnom ciklusu. Povoljna tačka se dobija za $t = 0$, kada je $m_{C1}(0) = 1/3$ i $m_{C2}(0) = 1/3$. Izuzev izbora početne vrednosti, program za simulaciju radi na isti način kao u prethodna tri primera: prvo se u oko deset perioda ustali odziv, onda se u narednih desetak perioda odredi perioda oscilovanja, da bi na kraju bila simulirana jedna perioda odziva i određeni parametri dobijenih signala, poput amplitude osnovnog harmonika, efektivne vrednosti i ukupnog harmonijskog izobličenja. Simulacije su ponavljane za niz vrednosti pojačanja A u rasponu od 3 do 5, što su vrednosti od interesa za oscilator sa Vinovim mostom. Dobijena zavisnost periode oscilacija od pojačanja je prikazana na slici 25, dok je zavisnost frekvencije oscilovanja prikazana na slici 26. Uočava se značajna promena periode i frekvencije oscilovanja sa promenom pojačanja, što je efekat koji nije moguće predvideti ni metodom presečnih tačaka, ni metodom opisnih funkcija prenosa.

Simulacijom su dobijeni vremenski dijagrami normalizovanih napona na ulazu i na izlazu pojačavača u ustaljenom stanju. Tako dobijenim vremenskim dijagramima je moguće odrediti osnovne harmonike, a deljenjem fazora osnovnog harmonika napona na ulazu pojačavača sa fazorom osnovnog harmonika napona na izlazu dobija se prenosna funkcija β -mreže na frekvenciji oscilovanja. Zavisnost amplitudske i fazne karakteristike β -mreže na frekvenciji oscilovanja od pojačanja A je prikazana na slici 27. Uočava se jako mala varijacija amplitudske karakteristike i tek nešto veća varijacija fazne karakteristike. Ovako mala zavisnost prenosne karakteristike β -mreže od frekvencije oscilovanja, tj. niska selektivnost, dovodi do velike varijacije frekvencije oscilovanja u zavisnosti od pojačanja pojačavača.

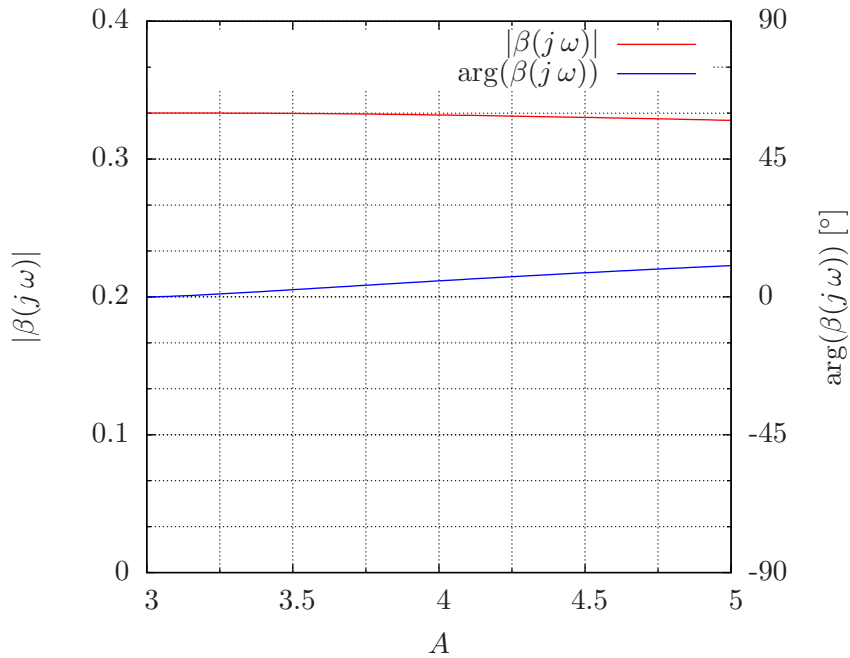
Na slici 28 prikazana je zavisnost ukupnog harmonijskog izobličenja ulaznog i izlaznog napona pojačavača od pojačanja. Uočava se da izobličenje raste sa porastom pojačanja i da je izobličenje ulaznog napona pojačavača uvek manje od izobličenja



Slika 25: Zavisnost periode oscilovanja od pojačanja



Slika 26: Zavisnost frekvencije oscilovanja od pojačanja



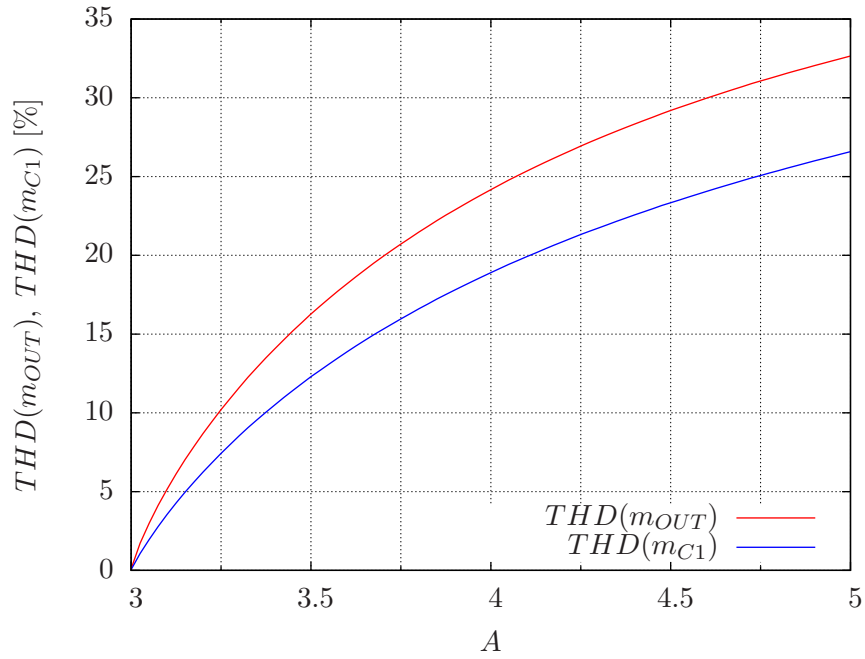
Slika 27: Zavisnost $|\beta(j\omega)|$ i $\arg(\beta(j\omega))$ od A

izlaznog napona. Ovo je očekivano, imajući u vidu prenosnu karakteristiku β -mreže koja slabi više harmonike.

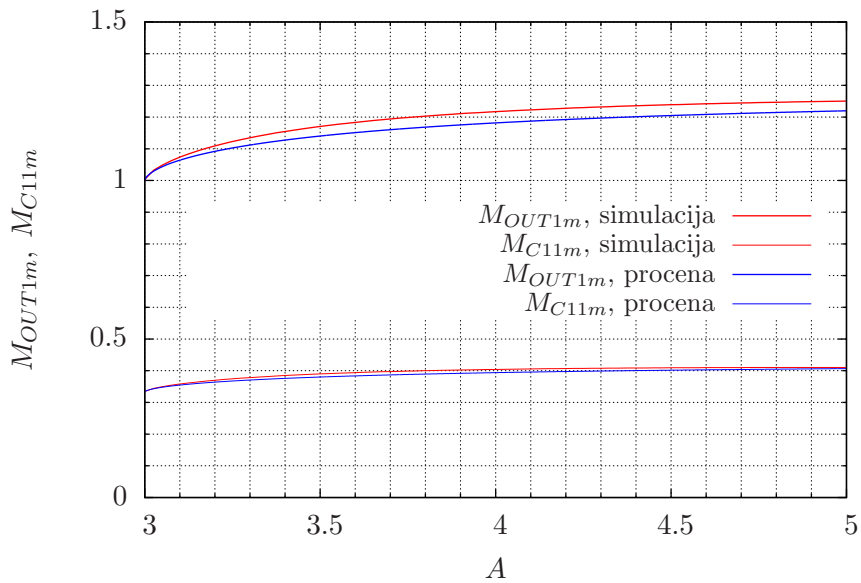
Razmatrani primer je iskorišćen i za proveru efikasnosti metoda opisnih funkcija prenosa. Kako je već objašnjeno, metod opisnih funkcija prenosa je oblik sinusoidalne aproksimacije i ne može predvideti odstupanje periode oscilovanja niti izobličenja napona. Opisna funkcija prenosa je analitički dobijena kao

$$G(M_m) = \begin{cases} A, & M_m < 1/A \\ A + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{M_m} \sqrt{1 - \frac{1}{A^2 M_m^2}} - A \arccos \left(\frac{1}{A M_m} \right) \right), & 1/A \leq M_m. \end{cases}$$

Normalizovana amplituda napona na ulazu pojačavača se dobija iz uslova $G(M_m) = 3$, kako bi važio $\beta(j\omega_0)G(M_m) = 1 + j0$. Amplituda osnovnog harmonika napona na ulazu pojačavača, $M_m = M_{C11m}$, je određena numerički, primenom metoda polovljenja intervala, znajući da se amplituda osnovnog harmonika izlaznog napona pojačavača nalazi u opsegu $1 \leq M_{OUT1m} \leq 4/\pi$, dok je amplituda osnovnog harmonika napona na ulazu pojačavača jednaka jednoj trećini amplitude na izlazu, $M_{C11m} = M_{OUT1m}/3$. Primena numeričkih metoda je uslovljena transcendentnom jednačinom koju treba rešiti i koja nema analitičko rešenje u zatvorenoj formi. Dobijene zavisnosti amplitude osnovnog harmonika ulaznog i izlaznog napona pojačavača od pojačanja su prikazane na slici 29, tako što su rezultati simulacije prikazani crvenom bojom, a procena dobijena metodom opisnih funkcija prenosa plavom bojom. Vidi se dobro slaganje rezultata koje opravdava primenu metoda opisnih funkcija prenosa za određivanje amplitude oscilacija. Metod presečnih tačaka u razmatranom slučaju predviđa amplitudu normalizovanog napona na izlazu pojačavača jednaku 1 i amplitudu na ulazu jednaku $1/3$, nezavisno od pojačanja pojačavača.



Slika 28: Zavisnost ukupnog harmonijskog izobličenja m_{OUT} i m_{C1} od pojačanja



Slika 29: Poređenje amplitude osnovnog harmonika m_{OUT} i m_{C1} dobijenih simulacijom i procenom metodom opisnih funkcija prenosa